

ΘΕΜΑ Α

A1. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$. **Μονάδες 10**

A2. Δίνεται το $P(x) = x^{2021} - 3x^{100} + 4$ και ο ισχυρισμός $P(3) \cdot P(5) \cdot P(6) \neq 0$

Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τον παραπάνω ισχυρισμό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 5**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές, ή Λ αν είναι λανθασμένες.

- i. Αν f γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^\pi\right) < f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^e\right)$
- ii. Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\sin \frac{\pi}{12} > \sin \frac{\pi}{10}$.
- iii. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(\rho) \neq 0$ τότε το $x - \rho$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.
- iv. Αν $P(2) = 4$ τότε το 4 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$
- v. Αν $\sin x = 0$ τότε $\eta \mu x = \pm 1$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(1,3) και B(2,13).

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -7$. **Μονάδες 7**

B2. Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$. **Μονάδες 4**

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Μονάδες 7**

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x - 31) < 3$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)x^3 + (\kappa - 1)x^2 - 3\kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{\text{ου}}$ βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ είναι ίσο με -4 . **Μονάδες 7**

Γ2. Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$

- i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$ **Μονάδες 5**
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 4 = x^2 - 1$. **Μονάδες 7**
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} \geq 1$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x + 1$ και η αριθμητική τιμή του για $x = 2$ να είναι ίση με 12. **Μονάδες 7**

Δ2. Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$

- i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 2$. **Μονάδες 5**
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq -x + 14$ **Μονάδες 7**
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $P\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) \leq -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 14$ **Μονάδες 6**

Να έχετε επιτυχία !!