ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης cf(x), όπου c πραγματικός αριθμός, ισούται με cf΄(x).

Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i με i = 1,2,…, κ μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

β. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει: $(f(x)+g(x))'= f'(x)+g'(x)$.

γ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση s, τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\overline{x}-s, \overline{x}+s)$..

δ. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{2}{\sqrt{x}}, x>0$

ε. Η διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+\alpha x^2-12x+10$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

Β2. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο x_0=1 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, να υπολογίσετε το α.

Μονάδες 6

Β3. Για α=3, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

Μονάδες 9

Β4. Για α=3, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ρωτήθηκαν οι μαθητές/τριες της Γ’ τάξης ενός ΕΠΑΛ πόσες ώρες διέθεσαν στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης την προηγούμενη εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους ομαδοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i\nu_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)		ν_3	
[20,24)		5	
	Σύνολο		

Δίνεται ότι ο μέσος χρόνος είναι $\overline{x}=14$.

Γ1. Να δείξετε ότι ν_3=10.

Μονάδες 8

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, με $x \neq 0$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [-4,-1]$ ισχύει:

$$-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}.$$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο M(1, f(1)).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$, είναι σημεία της εφαπτομένης (ε) τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_1, x_2, x_3 να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV των τεταγμένων y_1, y_2, y_3.

Μονάδες 6

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 30.

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 27.

Α3. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x - 12$

Β2. Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$. Αφού είναι παράλληλη στον x΄x άξονα ισχύει ότι :

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6\cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 + 2a - 12 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \boxed{a = 3}$$

Β3. Έχουμε $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$ και $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ με $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9$. Άρα $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$ $\nearrow x_1 = 1$, $\searrow x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[1,+\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,1]$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x_1 = -2$ με τιμή:

$$f(-2) = 2\cdot(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 - 12\cdot(-2) + 10 = -16 + 12 + 24 + 10 = 30$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x_2 = 1$ με τιμή:

$$f(1) = 2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + 10 = 2 + 3 - 12 + 10 = 3$$

Β4. $$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{6x^2+6x-12}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} = 6\cdot(1+2) = 18$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Κλάσεις	x_i	v_i	$x_i v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	v_3	$18\cdot v_3$
[20, 24)	22	5	110
Σύνολο	-	$40+v_3$	$520+18v_3$

$$x_3 = \frac{20+16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$x_4 = \frac{20+24}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

$$v = 40 + v_3$$

$$x_3\cdot v_3 = 18\cdot v_3$$

$$x_4\cdot v_4 = 22\cdot 5 = 110$$

Σύνολο: $200+210+110+18v_3=520+18\cdot v_3$

$$\bar{x} = \frac{520+18\cdot v_3}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{520+18\cdot v_3}{40+v_3} \Leftrightarrow$$

$$14\cdot(40+v_3) = 520+18v_3 \Leftrightarrow 560+14v_3 = 520+18v_3 \Leftrightarrow 4v_3 = 40 \Leftrightarrow v_3 = 10.$$

Γ2 Οπότε

Κλάσεις	x_i	v_i	$x_i\cdot v_i$
[8,12]	10	20	200
[12,16]	14	15	210
[16,20]	18	10	180
[20,24]	22	5	110
Σύνολο	–	50	700

Γ3.

Κλάσεις	x_i	v_i	$x_i\cdot v_i$	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\cdot vi$
[8,12]	10	20	200	–4	16	320
[12,16]	14	15	210	0	0	0
[16,20]	18	10	180	4	16	160
[20,24]	22	5	110	8	64	320
Σύνολο	–	50	700	–	–	800

$$s^2 = \frac{800}{50} = 16$$

Γ4. $CV=\dfrac{S}{|\overline{x}|}=\dfrac{\sqrt{16}}{14}=\dfrac{4}{14}=\dfrac{2}{7}>\dfrac{1}{10}=0{,}1$ επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$ ως πηλίκο παραγωγισίμων με

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{(1)'\cdot x^2-1\cdot\left(x^2\right)'}{(x^2)^2}=-\frac{0-2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2}{x^3}=0,\ \text{αδύνατη}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↘	‖	↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$

Δ2. $-4\le x\le -1 \overset{f\downarrow(-\infty,0)}{\Leftrightarrow} f(-4)\ge f(x)\ge f(-1)\Leftrightarrow -\dfrac{1}{16}\ge f(x)\ge -1$

Δ3. Είναι $f(1)=-1$. Έστω $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$. Είναι $\lambda=f'(1)=\dfrac{2}{1^3}=2$. Άρα είναι: y = 2x + β. Το σημείο Μ (1, f (1)) επαληθεύει την εφαπτομένη, άρα $f(1)=2\cdot 1+\beta\Leftrightarrow -1=2+\beta\Leftrightarrow\beta=-3$ Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=2x-3$

Δ4. Τα σημεία Α (x_1, y_1), Β (x_2, y_2) και Γ (x_3, y_3) ανήκουν στην (ε), οπότε:

$y_\iota=2x_\iota-3,\qquad \iota=1,2,3$

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει:

$\overline{y}=2\overline{x}-3=2\cdot 4-3=5\qquad Sy=|2|\cdot Sx=2\cdot 2=4$ Συνεπώς, $CVy=\dfrac{Sy}{|\overline{y}|}\cdot 100\%=\dfrac{4}{5}\cdot 100\%=80\%$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ
ΚΩΣΤΑΣ ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ • ΚΩΝ/ΝΑ ΣΤΕΙΑΚΑΚΗ • ΓΩΓΩ ΣΤΕΙΑΚΑΚΗ
ΑΛΕΞΑΝΔΡΙΔΗ ΚΕΛΥ • ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΡΟΓΔΑΚΗ • ΑΝΝΑ ΜΠΟΤΣΗ